METRICKÁ STRUKTURA

- * geometrie je schopnost měřit vzdálenosti v okolí každého bodu
  = zadání Pythagorovy věty pro blízké body
  (z toho již budeme schopni počítat vzdálenosti v celém prostoru)
- * geometrií máme na mysli vnitřní vlastnost prostoru = vnitřní geom.
  = jen to co lze měřit prostředky, které máme k dispozici uvnitř pr.
- * tzn. nezajímá nás jak je prostor zahnutý vložením do jiného (vnější geometrie se popisuje vnější křivostí a závisí na konkrétním vložení do konkr. vnějšího prostoru - viz GM2)
- * pro popis vnitřní geometrie (vnitřní křivosti) žádné vnoření nepotřebujeme, popíšeme jej metrikou

METRICKÝ TENZOR

$g_{\underline{ab}} \in T^0_2 M$

- sym. $g_{\underline{ab}} = g_{\underline{ba}}$
- nedeg. $\exists\, g^{-1\underline{ab}}$, $g^{-1\underline{am}} g_{\underline{mb}} = \delta^{\underline{a}}_{\underline{b}}$

$\uparrow$ * $\forall a \neq 0 : g_{\underline{am}} a^{\underline{m}} \neq 0$

(* nejprve lok. vlastnosti v každém bodě)

ortonormální báze e_k

$$g_{kl} = e^{\underline{a}}_k\, e^{\underline{b}}_l\, g_{\underline{ab}} = \begin{cases} \pm 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

* "-1" souvisí s tím, že nepožadujeme pozitivní definitost metriky! tzn. $a^{\underline{m}} a^{\underline{n}} g_{\underline{mn}} \gtrless 0$

* báze v níž komp. g_{kl} jsou diag$(--\ldots+++\ldots)$

signatura

počet −/+ nez. na volbě báze

$$(\underbrace{--\ldots}_{n}\underbrace{++\ldots}_{p}), \quad \operatorname{sign} g = (-1)^n$$

* součin znamének v signatuře

Př: Riemann. metriky $(++\ldots+)$ * "prostor"
Lorentz. metriky $(-+\ldots+)$ * "prostoročas"

metrická báze e_k

$g_{kl} =$ konst. * konstantní v prostoru (už se týká různých bodů)

* ortonormalita v každém bodě je speciální případ (další příklad: "nulová báze" = 2 vektory světelné/nulové)

isometrie TM a T^*M

$a^{\underline{m}} \to (^\flat a)_{\underline{m}} = g_{\underline{mn}} a^{\underline{n}}$

$\alpha_{\underline{m}} \to (^\sharp\alpha)^{\underline{m}} = g^{-1\underline{mn}} \alpha_{\underline{n}}$

* když máme metriku můžeme zvyšovat/snižovat indexy

* je to vzáj. jednoznačné zobrazení

* můžeme zvyš./sniž. automaticky $a_{\underline{m}} = g_{\underline{mn}} a^{\underline{n}}$, ale pak musíme dávat pozor na pořadí indexů

* speciálně u metriky:

$$(\#g)^{\underline{ab}} = g^{-1\,\underline{an}} g^{-1\,\underline{bn}} g_{\underline{mn}} = g^{-1\,\underline{ab}}$$

* když mám jen jednu metriku, tak stačí psát $g^{\underline{ab}}$ (třeba u konformních metod jsou často 2 metriky $\tilde{g} = \Omega^2 g$)

zvyš/sniž orton. báze $e_k \cdot e^l = \delta_k^l$

$$^{\flat}e_k = \pm e^k \qquad ^{\#}e^k = \pm e_k$$

* $\pm = \text{sign}\,(e^{\underline{m}}_k e^{\underline{n}}_k g_{\underline{mn}})$

* pro zvednutí/snížení se uplatní jen diagonální prvek g_{kk}, tzn. jen ± 1

speciálně v $(+\dots+)$

$$^{\#}e^k = e_k \qquad a^k = a_k$$

* nemusíme odlišovat komponenty v ortonormální bázi v Riem. signatuře

* pozor: u neortonormální musíme odlišovat (např. když je jen ortogonální)

(PSEUDO) SKALÁRNÍ SOUČIN

* to že metrika říká něco o geometrii je protože nám definuje skalární součin vektorů

$$(a, b) = a^{\underline{m}} b^{\underline{n}} g_{\underline{mn}}$$

- Riemannovská geometrie $(+\dots+)$
  pos. definitnost

  $$\forall a \neq 0 \quad (a, a) > 0$$

  * přes je pos. def., můžeme zavést velikost vektoru a úhly

  velikosti a úhly

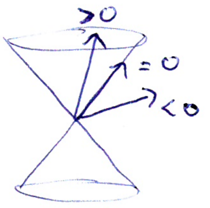
  $$|a| = (a, a)^{1/2}$$

  $$\cos \sphericalangle a,b = \frac{(a, b)}{|a||b|}$$

  * teď budeme chtít něco podobného v Lorentzovské signatuře

- Lorentzovská geometrie $(-+\dots+)$
  lokální kauzální struktura

  $$(a,a) \begin{cases} < 0 & \text{časupodobný} \\ = 0 & \text{světelný/nulový} \\ > 0 & \text{prostoru podobný} \end{cases}$$



* lokální = v jednom bodě

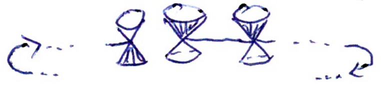
globální kauzální struktura (* uvedeme jen několik charakteristik týkajících se metriky v různých bodech)

- kauzální orientovatelnost

  * časupodobné vektory v bodě se rozpadají na budoucí a minulé (naše volba, které nazýváme budoucí)

  * při spojitém posunutí nechci měnit pojem "směřování do budoucnosti"

  * to lze zařídit vždy lokálně, ale globálně to tak být nemusí

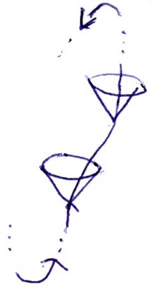


* pokud nenastává, tak je kauzálně orientovatelné

* kauzálně neorientovatelné = běh do budoucna v čase nedává smysl

- Uzavřené časové smyčky

* křivky jejichž tečný vektor je časupodobný v každém bodě nazýváme časupodobné (= historie pozorovatelů)



* obecně může nastat, že časupodobná křivka je smyčka = stroj času (budoucnost a minulost se prolínají)

- globální hyperbolicita (* implikuje kauz. or. a ∄ uz. časup. kř.)

* zhruba řečeno: prostoročas má strukturu "čas krát prostor"

$M = \mathbb{R} \times \Sigma$

↳ Cauchyho nadplocha =

∀ časup. křivky procházející bodem v budoucnosti Σ musí protnout Σ

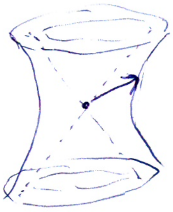
* to už zajišťuje že vývoj do budoucnosti běžných hyperbolických rovnic je dán daty na Σ

velikost

$a^2 = (a,a)$ $\quad |a| = |a^2|^{\frac{1}{2}}$

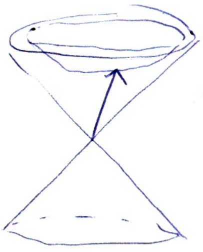
* a^2 může být záporné, proto mohou jednotkové vektory tvořit dva typy pseudosfér

(pseudo)sféry



$a^2 = 1$

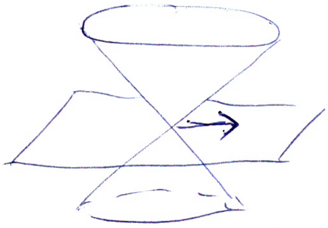
časupodobné



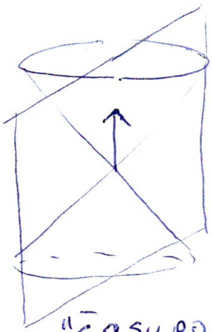
$n^2 = -1$

prostorupodobná

lineární podprostory

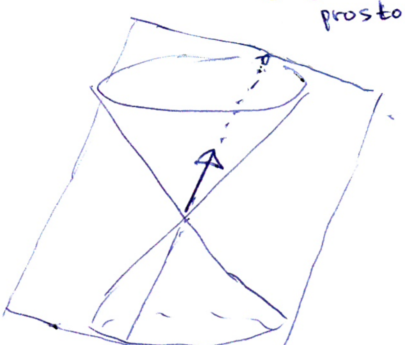


"prostorupodobný"
= ∀ vekt. prostorupodobné



"časupodobný"
= alespoň jeden vekt. časupodobný

* je to mezipřípad prostop. a časup.

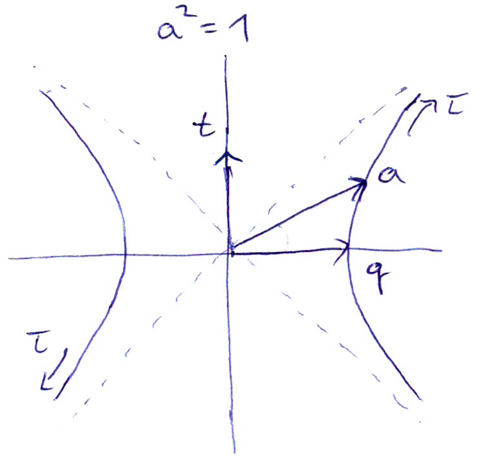


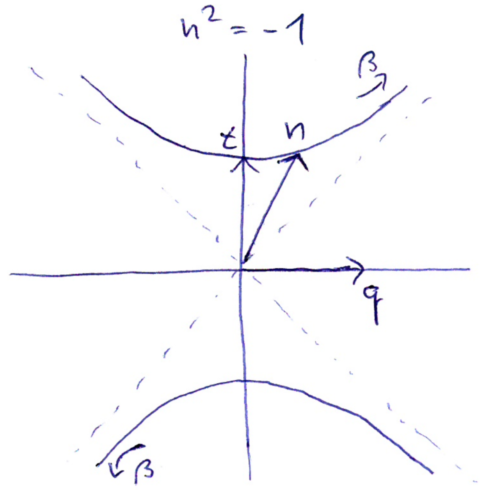
"nulový" ("světelný")
= právě jeden vekt. nulový

* zúžením na podprostory dostaneme metriky signatur (+…+), (−+…+), (0+…+) degen.

Př: pseudokružnice v $(-+)$ (* motivace pro zavedení pseudoúhlů)

ort. báze t, q $t^2=-1$, $q^2=1$, $(t,q)=0$





$a = \pm(\operatorname{sh}\tau\, t + \operatorname{ch}\tau\, q)$ $n = \pm(\operatorname{ch}\beta\, t + \operatorname{sh}\beta\, q)$

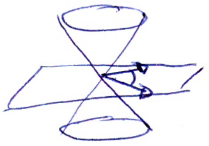
- * vektory a a n lze parametrizovat pomocí parametrů τ a β, které odpovídají "času" rovn. urych. poz. a "rapiditě" (rychlost vůči t)
- * na cvičení: τ a β jsou přímo délky kružnic
- * protože jsou to jednotkové pseudokružnice tak τ a β se říká pseudoúhly

pseudoúhly a úhly (* obecně, ne jen v $d=2$)

1) obal a,b prostorupodobný

$$\cos \measuredangle a,b = \frac{(a,b)}{|a||b|}$$

úhel γ



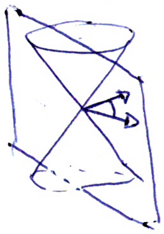
* a,b už musí být prostorupodobné

2) obal a,b je časupodobný & a,b jsou prostorupodobné

(jednotkové pseudokružnice

$$\operatorname{ch} \measuredangle a,b = \pm\frac{(a,b)}{|a||b|}$$

pseudoúhel τ

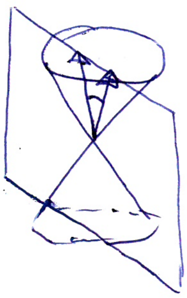


* v příkladu odpovídá $(a,q) = \pm \operatorname{ch}\tau$
* znaménko mínus používáme když vekt. a,b jsou na opačných stranách $(a \rightarrow -a)$

3) shodně orientované časupodobné a,b

$$\operatorname{ch} \measuredangle a,b = -\frac{(a,b)}{|a||b|}$$

rapidita β



* v příkladu odpovídá $(n,t) = -\operatorname{ch}\beta$
* šlo by zobecnit na opačné orientace; ale nedělá se

* další případy lze taky zavést, ale moc použití to není

DÉLKA KŘIVKY

křivky neměnící kauzální typ $z(\alpha)$

$$\left(\frac{Dz}{d\alpha}\right)^2 = \frac{D^a z}{d\alpha}\frac{D^b z}{d\alpha} g_{ab} \quad \begin{cases} <0 & \text{časup. kř.} \\ =0 & \text{nul./sv. kř.} \\ >0 & \text{prostorup. kř.} \end{cases}$$

$$\Delta s = \int_z^x ds = \int_{\alpha_z}^{\alpha_x} \underbrace{\left|\frac{Dz}{d\alpha}\right|}_{} d\alpha$$

* délka tečného vektoru

* světelné křivky mají nulovou délku
* abs. hodnota kvůli časup. kř.
* nezávisí na parametrizaci, s je přirozený (s je čas τ pokud c=1)

kauzální poloha bodů (* ztrácí smysl pokud ∃ časup. uz. smyčky nebo není kauz. or.)

x je v budoucnu y $(x \succ y)$

$\iff \exists$ časup. kř. z y do x

x a y jsou prostorup. položené $(x \sim y)$

$\iff \nexists$ časup. kř. mezi x a y

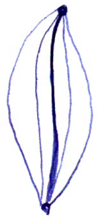
* pozor: nestačí ∃ prostorup. kř.

x a y nejsou prostorup. polož.

Vzdálenost bodů

* v Riem. pr.: délka nejkratší křivky (bude splňovat trojúhelníkovou nerovnost)

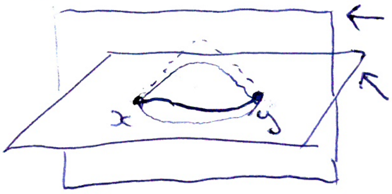
1) $x \succ y$: vzdál. = délka nejdelší časup. kř. (časová separovatelnost)



* ze všech možných časup. ta nejdelší možná je geodetika = nejrovnější čára (bude později) (na definici potřebuju kov. derivaci)

* jak nažít co nejvíc času mezi dvěma událostmi?
→ pohybovat se po geodetice = trajektorie volného pozorovatele (rovn. přím. vůči iner. s.)
(když sedíme na židli tak na nás působí neinerciální síla podložky tzn. je třeba vyskočit = volný pád)

2) $x \sim y$: vzdál. = délka prostorupodobné křivky, která je stacionárním (sedlovým) bodem (= prostorup. geod.)



← * křivky v této rovině kratší (může být blízko světelné)

* křivky v této rovině delší (proto minimum v Riem. ale ne v Lorentz. geom.)

* další veličina související s geometrií je objem (později: metrická hustota)

* zavedeme veličinu, která s objemem úzce souvisí: Levi-Civitův tenzor, což je anti-sym. tenzor nejvyššího stupně, $p = d = \dim V$

ANTI-SYM TENZORY MAX. STUPNĚ (= TOTÁLNĚ AS.)

(* zachme zase lokálně pro $V_{[d]}$)

$V^{[d]}$ $\quad V_{[d]}$ $\quad d = \dim V$ $\qquad$ (* vyššího stupně neexistují)

$\dim V^{[d]} = 1 = \dim V_{[d]}$

báze

$V_{[d]} \quad \epsilon = e^1 \wedge \ldots \wedge e^d$

$V^{[d]} \quad e = e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$

$\epsilon \bullet e = 1$ $\quad$ * v indexech $\frac{1}{d!} \epsilon_{\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d} e^{a_1 \ldots a_d} = 1$

(* ve zúžení dostanu nenulový příspěvek jen, když je stejné pořadí, takových členů je $d!$, součiny dají 1 pže duální báze)

* v souřadnicích na varietě

$e = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x^d}$

$\epsilon = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d$

* máme jen jednu komponentu

$\omega = \omega_{1 \ldots d}\, \epsilon \qquad w = w^{1 \ldots d} e$

$\Rightarrow \omega \bullet w = \omega_{1 \ldots d} w^{1 \ldots d}$ $\quad$ * zúžení je jen přenásobení komponent

* transformace souřadnic

$\omega = \omega_{1 \ldots d}\, \epsilon = \omega_{1' \ldots d'}\, \epsilon'$ $\quad$ * složky ve smyslu forem a tenzorů stejné; komponenta se musí transformovat tenzorově $\omega = \omega_{a_1 \ldots a_d} e^{a_1} \ldots e^{a_d}$

$\omega_{1' \ldots d'} = T^{a_1}_{1'} \ldots T^{a_d}_{d'} \omega_{a_1 \ldots a_d}$

↑ matice přechodu $e^k = T^k_{\ell'} e^{\ell'}$

$= \sum_{\substack{\sigma \\ \text{perm.}}} T^{\sigma_1}_{1'} \ldots T^{\sigma_d}_{d'} \omega_{\sigma_1 \ldots \sigma_d} = \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \\ \text{perm.}}} \operatorname{sign} \sigma\, T^{\sigma_1}_{1'} \ldots T^{\sigma_d}_{d'}}\, \omega_{1 \ldots d}$

* v každém členu prohodím na pořadí 1…d (což vyhodí znaménko σ)

* když se index zopakuje tak je nula, protože $\omega_{a_1 \ldots a_d}$ je antisym → napíšu jako součet přes perm.

* toto je přesně definice determinantu

$= (\det T^k_{\ell'})\, \omega_{1 \ldots d}$

* komponenta se transformuje s determinantem

* v souř. bázi $T^k_{\ell'} = x^k_{,\ell'}$, faktor $\det x^k_{,\ell'}$ je přesně Jakobián transf. souř. při integrování (* proto souvisí s integrovatelnými hustotami)

* podobně

$w^{1' \ldots d'} = (\det T^{k'}_{\ell})\, w^{1 \ldots d}$ $\quad$ * protože $\omega_{1 \ldots d} w^{1 \ldots d} = \omega_{1' \ldots d'} w^{1' \ldots d'}$, $1/\det T^k_{\ell'} = \det T^{k'}_{\ell}$

↑ * inverzní matice k $T^k_{\ell'}$

* inverze (* lze udělat identifikaci $V_{[d]}$ a $V^{[d]}$, tzn. převádět mezi sebou)

$$^{-1}: V_{[d]} \longleftrightarrow V^{[d]}$$

* funguje oběma směry protože tam a zpět je id. $^{-1} \circ ^{-1} = id$

$$\omega^{-1} \bullet \omega = 1 \qquad w^{-1} \bullet w = 1$$

* funguje protože $V_{[d]}$ je 1-dim. vekt. pr. (tzn. "čísla" bez informace o velikosti základní jednotky)

* platí

$$(\omega^{-1})^{1\ldots d} = \frac{1}{\omega_{1\ldots d}} \, , \quad (r\omega)^{-1} = \frac{1}{r} \omega^{-1}$$

$$\omega^{-1} \omega = d! \, {}^{[d]}\delta$$

* je jasné že tenz. součin je úměrný ${}^{[d]}\delta$, faktor $d!$ se dostane zúžením pomocí $\bullet$ a díky $\mathrm{Tr} \, {}^{[d]}\delta = \dim V^{[d]} = 1$

* akce pseudo derivace (* teď už bereme $V_{[d]} = \Lambda^d M$)

$$\mathbf{M} \, \omega_{\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d} = - M^{\underline{n}}{}_{\underline{a}_1} \omega_{\underline{n} \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d} \cdots - M^{\underline{n}}{}_{\underline{a}_d} \omega_{\underline{a}_1 \ldots \underline{n}}$$

* jeden člen pro každý spodní index

$$= - d \, M^{\underline{n}}{}_{[\underline{a}_1} \omega_{|\underline{n}| \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d]} \qquad = - \alpha \, \omega_{\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d}$$

* prokomutuji $\underline{n}$ na první pozici, dostanu všechna možná netriv. pořadí $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d$, to je něco jako wedge mezi $\underline{a}_1$ a $\underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d$ (viz předminule)

* protože výsledek je d-forma, musí být úměrný původní ω, stačí najít α

* zúžím s ω^{-1} (pomocí $\bullet$)

* využití $\omega^{-1 \, \underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d} \omega_{\underline{n} \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d} = d! \, {}^{[d]}\delta^{\underline{a}_1 \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d}_{\underline{n} \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d}$

* viz papír se vztahy

$$\alpha = \frac{d}{d!} \omega^{-1 \, \underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d} M^{\underline{n}}{}_{\underline{a}_1} \omega_{\underline{n} \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d} = d \, M^{\underline{n}}{}_{\underline{a}_1} \, {}^{[d]}\delta^{\underline{a}_1 \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d}_{\underline{n} \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_d} = M^{\underline{n}}{}_{\underline{a}_1} \delta^{\underline{a}_1}_{\underline{n}} = M^{\underline{n}}{}_{\underline{n}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} \, \omega_{\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d} = - M^{\underline{n}}{}_{\underline{n}} \omega_{\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_d}$$

* pseudo derivace působí přes stopu, pže $\det A$ je reprezentace grupy a $\mathrm{Tr} \, M$ je příslušná reprezentace algebry

* pozn: determinant operátoru $A^{\underline{m}}{}_{\underline{n}}$

$$\det A = A^{\underline{a}_1}{}_{[\underline{a}_1} \cdots A^{\underline{a}_d}{}_{\underline{a}_d]} = \det A^{k}{}_{l} = \det \left(T^{k}{}_{m'} A^{m'}{}_{n'} T^{n'}{}_{l} \right)$$

* v souřadnicích (lze ukázat)

* přechod do jiné báze

$$= \cancel{\det T^{k}{}_{l'}} \det A^{k'}{}_{l'} \cancel{\det T^{k'}{}_{l}} = \det A^{k'}{}_{l'}$$

inverzní matice

* nezávisí na bázi

* zavedeme pojem orientace, který lze charakterizovat právě pomocí volby Levi-civ. tenzoru, tzn. tenzoru z $\Lambda^d M$

LEVI-CIVITŮV TENZOR

* charakterizuje volbu "jednotky" na $\Lambda^d M$ pomocí metriky, což souvisí s volbou orientace bazí

lokální orientace bazí

$e_k, e_{k'}$ shodně orientované

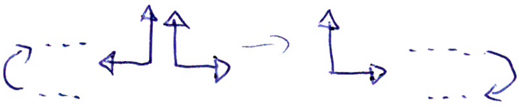
$\det T^{k}{}_{k'} > 0$

* chci dovolit jen spojité změny báze, kdyby $\det T^{k}{}_{k'} = 0$, tak báze degeneruje proto nemůžu dovolit změnu znaménka

* $\Rightarrow$ 2 třídy bází (v každém bodě)
jednu nazvu "pos. orientovanou"

globální orientovatelnost

* když spojitou změnou báze z bodu do bodu nastane změna orientace, tak varieta není orientovatelná; tzn. orientovatelná varieta = $\exists$ globální spojitá pos. or. báze



* př: Möbiův pásek je neorientovatelný

* řekneme, že

$\omega \in \Lambda^d M$ je pos. orient.

$\omega_{1\dots d} > 0$ vůči pos. orient. bázi

* nezávisí na volbě báze
pže $\omega_{1'\dots d'} = \underbrace{(\det T^{k}{}_{l'})}_{>0} \underbrace{\omega_{1\dots d}}_{>0} > 0$

* $\Lambda^d M$ se rozpadají na pos. a neg. orientované

* šlo by otočit: jednu třídu d-forem nazvat pos. orientované a pos. orient. bázi definovat požadavkem, že v ní mají pos. orient. formy $\omega_{1\dots d} > 0$
(to se dělá volbou Levi-Civitova tenzoru)

Levi-Civitův tenzor (* je to vpodstatě volba jednotky na $\Lambda^d M$)

i) $\varepsilon_{\underline{a_1}\dots\underline{a_d}} \in \Lambda^d M$

ii) $\varepsilon_{\underline{a_1}\dots\underline{a_d}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{metrika } g}}{\#} \varepsilon^{\underline{a_1}\dots\underline{a_d}} = (\operatorname{sign} g)\, d!$ * normalizace ε pomocí metriky g

*ekvivalentně

$\varepsilon \bullet {}^{\#}\varepsilon = \operatorname{sign} g$

iii) $\varepsilon_{\underline{a_1}\dots\underline{a_d}}$ je pos. orient. * tzn. $\varepsilon_{1\dots d} > 0$ v pos. or. bázi

* naopak: volba ε říká, které d-formy jsou pos. or.
tzn. jaká báze je pos. or.

orton. báze

* orton. báze

* jen součin znamének

$$ {}^{\#}\varepsilon^{1\dots d} = g^{1a_1}\dots g^{da_d}\,\varepsilon_{a_1\dots a_d} = g^{11}\dots g^{dd}\,\varepsilon_{1\dots d} = (\mathrm{sign}\, g)\,\varepsilon_{1\dots d} $$

* komponenta ${}^{\#}\varepsilon$ se dostane z komp. ε zvednutím indexů

* využiju $\varepsilon \bullet {}^{\#}\varepsilon = \mathrm{sign}\, g$

* v pos. or. b

$$ \Rightarrow \varepsilon \bullet {}^{\#}\varepsilon = \varepsilon_{1\dots d}\,{}^{\#}\varepsilon^{1\dots d} = (\mathrm{sign}\, g)(\varepsilon_{1\dots d})^2 \Rightarrow \varepsilon_{1\dots d} = \boxed{+}\!\!\!-1 $$, tzn. $\varepsilon = e^1\wedge\dots\wedge e^d$

* znaménko sign g v definici ε souvisí s požadavkem $\varepsilon_{1\dots d} = 1$

obecná báze (* podobná úvaha)

$$ {}^{\#}\varepsilon^{1\dots d} = g^{1a_1}\dots g^{da_d}\,\varepsilon_{a_1\dots a_d} = \sum_\sigma g^{1\sigma_1}\dots g^{d\sigma_d}\,\mathrm{sign}\,\sigma\;\varepsilon_{1\dots d} = (\det g_{ab})^{-1}\,\varepsilon_{1\dots d} $$

* znovu trik s permutací a uspořádáním na $\varepsilon_{1\dots d}$

* pomocí det inverzní matice

$$ \Rightarrow \varepsilon \bullet {}^{\#}\varepsilon = \varepsilon_{1\dots d}\,{}^{\#}\varepsilon^{1\dots d} = (\det g_{ab})^{-1}(\varepsilon_{1\dots d})^2 \Rightarrow \varepsilon_{1\dots d} = \boxed{+}\!\!\!-\,|\det g_{ab}|^{\frac{1}{2}} $$

* v pos. or. b.

* díky $\varepsilon \bullet {}^{\#}\varepsilon = \mathrm{sign}\, g = \mathrm{sign} \det g_{ab}$

* pozn: inverze Levi-Civ. tenz.

$\varepsilon^{-1} = \mathrm{sign}\, g\ {}^{\#}\varepsilon$ * pže $(\varepsilon^{-1})^{1\dots d} = (\varepsilon_{1\dots d})^{-1}$, ${}^{\#}\varepsilon^{1\dots d} = (\mathrm{sign}\, g)\,\varepsilon_{1\dots d}$

* pozn: vztah k ${}^{[d]}\delta$

$$ {}^{\#}\varepsilon^{\underline{a}_1\dots\underline{a}_d}\,\varepsilon_{\underline{b}_1\dots\underline{b}_d} = d!\,\mathrm{sign}\, g\ {}^{[d]}\delta^{\underline{a}_1\dots\underline{a}_d}_{\underline{b}_1\dots\underline{b}_d} $$

* faktor ověřím úžením (pomocí $\bullet$)

HODGEŮV DUÁL

$$ * : \Lambda^p M \to \Lambda^{d-p} M $$

$$ (*\omega)_{\underline{a}_{p+1}\dots\underline{a}_d} = \frac{1}{p!}\,{}^{\#}\omega^{\underline{a}_1\dots\underline{a}_p}\,\varepsilon_{\underline{a}_1\dots\underline{a}_d} $$

* zúžení s prvními p indexy ε po zvednutí indexů metrikou

neboli $*\omega = {}^{\#}\omega \bullet \varepsilon$

platí

$$ **\omega = \mathrm{sign}\, g\,(-1)^{p(d-p)}\,\omega $$

* znaménko $(-1)^{p(d-p)}$ je kvůli prohození prvních p indexů ε s posledními d-p indexy, protože druhý duál musím dělat zase zepředu

(cv.)

důk:

* vnější Hodge

$$ (**\omega)_{\underline{a}_1\dots\underline{a}_p} = \frac{1}{(d-p)!}\,(*\omega)^{\underline{n}_1\dots\underline{n}_{d-p}}\,\varepsilon_{\underline{n}_1\dots\underline{n}_{d-p}\underline{a}_1\dots\underline{a}_p} $$

* vnitřní Hodge a prohození indexů u druhého ε

$$ = \frac{1}{p!(d-p)!}\,\omega_{\underline{b}_1\dots\underline{b}_p}\,\varepsilon^{\underline{b}_1\dots\underline{b}_p\underline{n}_1\dots\underline{n}_{d-p}}\,\varepsilon_{\underline{a}_1\dots\underline{a}_p\underline{n}_1\dots\underline{n}_{d-p}}\,(-1)^{p(d-p)} $$

* vztah k ${}^{[d]}\delta$

$$ = \mathrm{sign}\, g\,(-1)^{p(d-p)}\,\omega_{\underline{b}_1\dots\underline{b}_p}\,{}^{[d]}\delta^{\underline{b}_1\dots\underline{b}_p\underline{n}_1\dots\underline{n}_{d-p}}_{\underline{a}_1\dots\underline{a}_p\underline{n}_1\dots\underline{n}_{d-p}}\,\frac{d!}{p!(d-p)!} $$

* viz papír

$$ = \mathrm{sign}\, g\,(-1)^{p(d-p)}\,{}^{[p]}\delta^{\underline{b}_1\dots\underline{b}_p}_{\underline{a}_1\dots\underline{a}_p}\,\omega_{\underline{b}_1\dots\underline{b}_p} = \mathrm{sign}\, g\,(-1)^{p(d-p)}\,\omega_{\underline{a}_1\dots\underline{a}_p} $$

pozn: vektorové nás. v $d=3$: $a\times b = *(a\wedge b)$ $(a\times b)_{\underline{m}} = a^{\underline{k}} b^{\underline{l}}\,\varepsilon_{\underline{klm}}$

(pseudo) skal. součin na $\Lambda^p M$

$\omega, \sigma \in \Lambda^p M$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{skal. souč}}}{\omega \bullet \sigma} = \omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kontrakce}}}{\bullet} {}^{\#}\sigma$$

(* indexy druhé zvednu pomocí metriky)

* mocnina $\omega^2 = \omega \bullet \omega$

vlastnosti

i) $(*\omega)\bullet(*\sigma) = (\operatorname{sign} g)\, \omega \bullet \sigma$

* liší se jen o znaménko (Hodge je skoro izometrie na tomto skal. součinu)

ii) $\omega \wedge (*\sigma) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symetrie}}}{=} \sigma \wedge (*\omega) \underset{\substack{\uparrow}}{=} (\omega \bullet \sigma)\, \varepsilon = *(\omega \bullet \sigma)$

* je úměrné ε, pže celkem stupně d

Cv.

důk:

* rozpis Hodge a skal. součinu

i) $$(*\omega)\bullet(*\sigma) = \frac{1}{(d-p)!}\frac{1}{p!}\frac{1}{p!}\, \omega_{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}\, \varepsilon^{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p \underline{n}_{p+1} \dots \underline{n}_d}\, \sigma^{\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p}\, \varepsilon_{\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p \underline{n}_{p+1} \dots \underline{n}_d}$$

* vztah k ${}^{[d]}\delta$ a papír

$$\overset{\vee}{=} \operatorname{sign} g\, \frac{p!}{p!\,p!}\, \omega_{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}\, \sigma^{\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p}\, {}^{[p]}\delta^{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}_{\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p} = \operatorname{sign} g\, \frac{1}{p!}\, \omega_{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}\, \sigma^{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}$$

$$= \operatorname{sign} g\ \omega \bullet \sigma$$

ii) * první spočítáme $*(\omega \wedge *\sigma)$

$$*(\omega \wedge *\sigma) = \frac{1}{d!}\frac{d!}{p!(d-p)!}\frac{1}{p!}\, \omega_{[\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}\, \sigma^{\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p}\, \varepsilon_{|\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p| \underline{a}_{p+1} \dots \underline{a}_d]}\, \varepsilon^{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_d}$$

* rozpis

* vztah k ${}^{[d]}\delta$ a papír

$$= \frac{1}{p!} \operatorname{sign} g\, \omega_{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}\, \sigma^{\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p}\, {}^{[p]}\delta^{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_p}_{\underline{b}_1 \dots \underline{b}_p} = \operatorname{sign} g\ \omega \bullet \sigma$$

$$\Rightarrow\ *(\omega \bullet \sigma) = \operatorname{sign} g\, **(\underbrace{\omega \wedge *\sigma}_{d\text{-form}}) = \underbrace{(-1)^{0d}}_{1} \underbrace{(\operatorname{sign} g)^2}_{1}\, \omega \wedge *\sigma = \omega \wedge *\sigma$$

* definice Hodge

$$*(\underbrace{\omega \bullet \sigma}_{0\text{-form}}) = (\omega \bullet \sigma)\, \varepsilon$$

KILLINGOVY VEKTORY

symetrie metriky

$\phi_* g = g$ ϕ difeom.

spojitá symetrie

$\phi_{\tau *} g = g$ ϕ_τ tok

* diferenciálně:

$\pounds_\xi g = 0$ ξ generátor toku = Kill. vektor algebra Kill. vektorů

ξ, ζ Kill. vekt. $\Rightarrow$ $[\xi, \zeta]$ Kill. vekt.

důk:

$$\mathcal{L}_{[\xi,\zeta]} \underset{\uparrow \atop *\,\text{bylo}}{=} \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\zeta - \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\zeta \qquad \mathcal{L}_\xi g = \mathcal{L}_\zeta g = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{[\xi,\zeta]} g = 0$$

konformní spojitá symetrie (* symetrie až na konformní přeškálování)

$$\phi_{\tau *} g = \Omega_\tau^2 g$$

* diferenciálně:

$$\mathcal{L}_\xi g = \lambda g$$

ξ generátor toku
= konf. Kill. vektor

algebra konf. Kill. vekt.

ξ, ζ konf. Kill. vekt $\Rightarrow$ $[\xi, \zeta]$ konf. Kill. vekt

důk:

$$\mathcal{L}_{[\xi,\zeta]} g = \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\zeta g - \mathcal{L}_\zeta \mathcal{L}_\xi g = \mathcal{L}_\xi (\lambda_2 g) - \mathcal{L}_\xi (\lambda_1 g)$$

$$\underset{\nearrow \atop \text{Leibniz}}{=} \cancel{\lambda_2 \underbrace{\mathcal{L}_\xi g}_{\lambda_1 g}} + (\xi \cdot d\lambda_2) g - \cancel{\lambda_1 \underbrace{\mathcal{L}_\zeta g}_{\lambda_2 g}} - (\zeta \cdot d\lambda_1) g = \underbrace{(\xi \cdot d\lambda_2 - \zeta \cdot d\lambda_1)}_{\tilde{\lambda}} g$$

PŘ: LEVI-CIVITŮV TENZOR NA S^2

$$g = r_0^2\left(d\vartheta\, d\vartheta + \sin^2\vartheta\, d\varphi\, d\varphi\right)$$

1) určete Levi-Civ. tenz. ϵ

orton. báze

$$e^\vartheta = r_0\, d\vartheta \qquad e^\varphi = r_0 \sin\vartheta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon = e^\vartheta \wedge e^\varphi = r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$$

2) spočtěte $\mathcal{L}_{\partial_\vartheta}\epsilon$ a $\mathcal{L}_{\partial_\varphi}\epsilon$

$$\mathcal{L}_{\partial_\varphi}\left(r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi\right) = 0$$

* ϵ je fce metriky a ∂_φ je Kill. vekt.

$$\mathcal{L}_{\partial_\vartheta}\left(r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi\right) = r_0^2 \cos\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi = \cot\vartheta\, \epsilon$$

$\mathcal{L}_\xi g = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}_\xi \epsilon = 0$

ale ne opačně!

v metrice je víc informace

3) nalezněte $f(\vartheta)$ aby $\mathcal{L}_{f\partial_\vartheta}\epsilon = 0$

$$\mathcal{L}_{f\partial_\vartheta}\epsilon = f\mathcal{L}_{\partial_\vartheta}\epsilon + df \wedge (\partial_\vartheta \cdot \epsilon)$$

* vztah z minule

$$= f\cot\vartheta\, \epsilon + df \wedge r_0^2 \sin\vartheta\, d\varphi$$

$$= \left(f\cot\vartheta + f_{,\vartheta}\right)\epsilon \overset{?}{=} 0$$

nechť $f_{,\varphi} = 0$

$$\frac{1}{f} f_{,\vartheta} = -\cot\vartheta \quad \Rightarrow \quad \log f = \log\left(\frac{a}{\sin\vartheta}\right) \quad \Rightarrow \quad f = \frac{a}{\sin\vartheta}$$

* vektor $\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta$ je symetrie ϵ ale není to symetrie g, $\mathcal{L}_{\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta} g \neq 0$

$$\mathcal{L}_\xi \epsilon = 0 \not\Rightarrow \mathcal{L}_\xi g = 0$$

PŘ: LEVI-CIVITŮV TENZOR NA S^3

$$g = dx\, dx + \sin^2 x\left(d\vartheta\, d\vartheta + \sin^2\vartheta\, d\varphi\, d\varphi\right)$$

1) spočtěte ϵ a $^\#\epsilon$

$$e^x = dx \qquad e^\vartheta = \sin x\, d\vartheta \qquad e^\varphi = \sin x \sin\vartheta\, d\varphi \qquad \text{orton. báze}$$

$$\Rightarrow \epsilon = e^x \wedge e^\vartheta \wedge e^\varphi = \sin^2 x \sin\vartheta\, dx \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$$

$$^\#\epsilon = e_x \wedge e_\vartheta \wedge e_\varphi = \frac{1}{\sin^2 x \sin\vartheta}\, \partial_x \wedge \partial_\vartheta \wedge \partial_\varphi$$

$$\uparrow\; e_x = \partial_x \qquad e_\vartheta = \frac{1}{\sin x}\partial_\vartheta \qquad e_\varphi = \frac{1}{\sin x}\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi$$

* duální ort. báze, $g^{-1} = \partial_x \partial_x + \frac{1}{\sin^2 x}\left(\partial_\vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi \partial_\varphi\right)$

2) spočtěte $*d*\alpha$

kde $\alpha = f(x) \sin^{-2} x\, dx$

$$^\#\alpha = g^{-1} \cdot \alpha = f(x) \sin^{-2} x\, \partial_x$$

$$*\alpha = {}^\#\alpha \cdot \epsilon = f(x) \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$$

* alternativně "Leibniz" pro •

$^\#\alpha \cdot dx = f(x) \sin^{-2} x$

$^\#\alpha \cdot d\vartheta \wedge d\varphi = 0$

$$d * \alpha = f'(x) \sin\vartheta \; dx \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$$

$\uparrow$ Leibniz, $d^2 = 0$, $d\vartheta \wedge d\vartheta = 0$

$$\# d * \alpha = \frac{f'(x)}{\sin^4 x \sin\vartheta} \partial_x \wedge \partial_\vartheta \wedge \partial_\varphi$$

* pře $\# dx = \partial_x$, $\# d\vartheta = \frac{1}{\sin^2 x} \partial_\vartheta$

$\# d\varphi = \frac{1}{\sin^2 x \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi$

$$* d * \alpha = (\# d * \alpha) \bullet \varepsilon = \frac{f'(x) \sin^2 x \sin\vartheta}{\sin^4 x \sin\vartheta} \underbrace{(\partial_x \wedge \partial_\vartheta \wedge \partial_\varphi) \bullet (d_x \wedge d\vartheta \wedge d\varphi)}_{=1}$$

$$= \frac{f'(x)}{\sin^2 x}$$

* je to 0-forma (číslo)

* je duální báze

(* v tečce je $\frac{1}{3!}$, v kontrakci jen členy ve stejném pořadí, těch bude 3!)

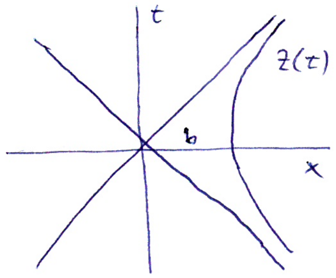
PŘ: DÉLKA PSEUDOKRUŽNICE

Minkowski $d=2$ $\quad g = -dt\,dt + dx\,dx$

pseudokružnice $z(\tau)$

$t(\tau) = b \,\mathrm{sh}(\tau)$

$x(\tau) = b \,\mathrm{ch}(\tau)$



Spočtěte délku intervalu $(0, T)$

tečný vektor

$$\frac{Dz(\tau)}{d\tau} \overset{\uparrow}{=} \frac{Dz(\tau)}{d\tau}[x^i] \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d x^i(z(\tau))}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

* pře $a = a[x^i] \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad$ * pře $\frac{Dz(\tau)}{d\tau}[f] = \frac{d f(z(\tau))}{d\tau}$

$$\frac{Dz(\tau)}{d\tau} = b \,\mathrm{ch}\, \tau \frac{\partial}{\partial t} + b \,\mathrm{sh}\, \tau \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left(\frac{Dz(\tau)}{d\tau}\right)^2 = b^2 (-\mathrm{ch}^2 \tau + \mathrm{sh}^2 \tau) = -b^2$$

* časup. kř.

$$\Delta s = \int_0^T \left| \frac{Dz(\tau)}{d\tau} \right| = \int_0^T \sqrt{|-b|}\, d\tau = b\,T$$

"poloměr" "úhel"

PŘ: MINKOVSKI $d=2$

$$g = -dt^2 + dx^2$$

1) nalezněte Killingovy vektory

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \qquad \xi = \xi^t\frac{\partial}{\partial t} + \xi^x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$0 = \mathcal{L}_\xi(-dt^2+dx^2) = -\underbrace{(\mathcal{L}_\xi dt)}_{\underbrace{d\mathcal{L}_\xi t}_{d\underbrace{\xi[t]}_{\xi^t}}}\vee dt + \underbrace{(\mathcal{L}_\xi dx)}_{\underbrace{d\mathcal{L}_\xi x}_{d\underbrace{\xi[x]}_{\xi^x}}}\vee dx$$

$$= -(\xi^t_{,t}dt + \xi^t_{,x}dx)\vee dt + (\xi^x_{,t}dt + \xi^x_{,x}dx)\vee dx$$

$$= -2\xi^t_{,t}dt\,dt + 2\xi^x_{,x}dx\,dx + (-\xi^t_{,x} + \xi^x_{,t})dt\vee dx$$

$$\Rightarrow \xi^t_{,t} = 0,\quad \xi^x_{,x} = 0,\quad \xi^t_{,x} = \xi^x_{,t}$$

$$\Rightarrow \xi^t = \xi^t(x) \qquad \xi^x = \xi^x(t)$$

$$\Rightarrow \xi^{t\prime}(x) = \xi^{x\prime}(t) = k = \text{konst}$$

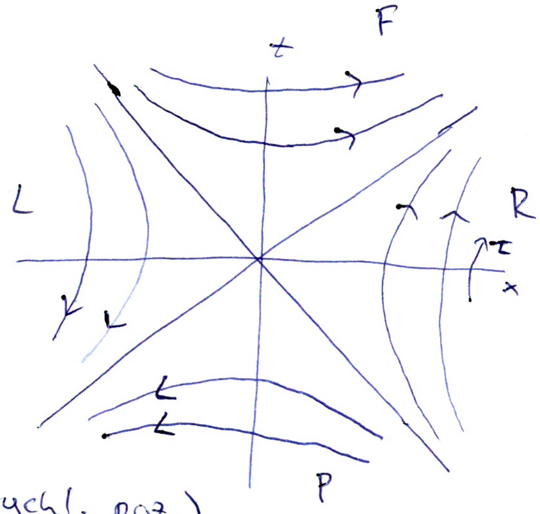
$$\Rightarrow \xi^t = cx + \underset{\overset{\uparrow}{\text{konst}}}{\xi_0^t},\quad \xi^x = ct + \underset{\overset{\uparrow}{\text{konst}}}{\xi_0^x}$$

$$\Rightarrow \xi = k\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{\text{boosty}\quad \frac{\partial}{\partial \tau}} + \xi_0^t\frac{\partial}{\partial t} + \xi_0^x\frac{\partial}{\partial x}$$

translace

pozn: * adaptované souř.:

$$g = -dt\,dt + dx\,dx = -\varrho^2 d\tau^2 + d\varrho^2$$



L,R: $t = \varrho\,\mathrm{sh}\,\tau \qquad \varrho^2 = -t^2 + x^2$

$x = \pm\varrho\,\mathrm{ch}\,\tau \qquad \mathrm{th}\,\tau = \pm\frac{t}{x}$

F,P: $t = \pm\varrho\,\mathrm{ch}\,\tau \qquad \varrho^2 = t^2 - x^2$

$x = \varrho\,\mathrm{sh}\,\tau \qquad \mathrm{th}\,\tau = \pm\frac{x}{t}$

* urychlené souřadnice (trajekt. urychl. poz.)

2) nalezněte g a ε v nulových souř.

$$u = t - x \qquad t = \frac{1}{2}(u+v)$$
$$v = t + x \qquad x = \frac{1}{2}(v-u)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} dt &= \frac{1}{2}(du + dv) \\ dx &= \frac{1}{2}(dv - du) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g = -\frac{1}{2} du \vee dv$$

$$\Rightarrow \varepsilon = dt \wedge dx = \frac{1}{2} du \wedge dv$$

3) nalezněte $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ pomocí $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial}{\partial u} \cdot du = \frac{\partial}{\partial u} \cdot (dt - dx) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u} \cdot dv = \frac{\partial}{\partial u} \cdot (dt + dx) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \cdot dt &= \frac{1}{2} \\ \frac{\partial}{\partial u} \cdot dx &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

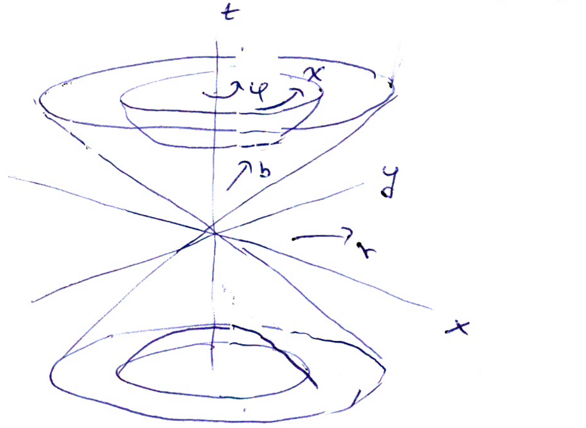
$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial v} \cdot du = \frac{\partial}{\partial v} \cdot (dt - dx) \\ 1 &= \frac{\partial}{\partial v} \cdot dv = \frac{\partial}{\partial v} \cdot (dt + dx) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \cdot dt &= \frac{1}{2} \\ \frac{\partial}{\partial v} \cdot dx &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

PŘ: MINKOWSKI $d=3$

$$g = -dt\,dt + dx\,dx + dy\,dy = -dt\,dt + dr\,dr + r^2 d\varphi\, d\varphi$$

1) nalezněte indukované metriky na pseudosférách $-t^2+r^2=\text{konst} \gtrless 0$

a) $b^2 = t^2 - r^2$ $\qquad (t,r) \leftrightarrow (b,\chi)$



* lze parametrizovat:

$t = b\,\mathrm{ch}\,\chi$

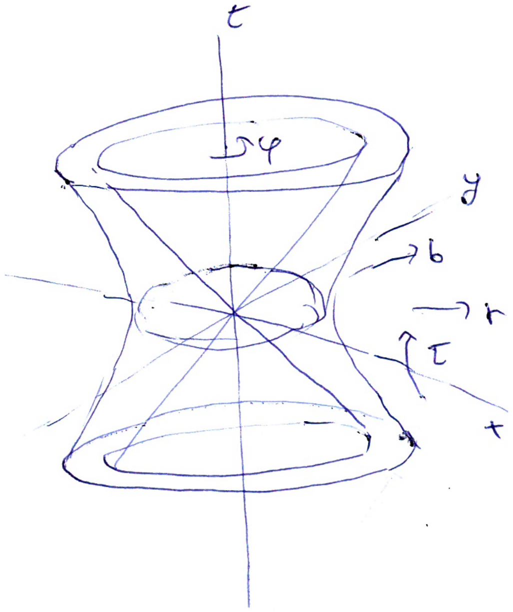
$r = b\,\mathrm{sh}\,\chi$

$$g = -db\,db + b^2(d\chi\, d\chi + \mathrm{sh}^2\chi\, d\varphi\, d\varphi)$$

$$g|_{b=\text{konst}} = b_0^2(d\chi\, d\chi + \mathrm{sh}^2\chi\, d\varphi\, d\varphi)$$

$\mathbb{L}^2$ hyperbolický (Lobačevského) prostor (záporná konst. křivost)

b) $b^2 = -t^2 + r^2$ $\qquad (t,r) \leftrightarrow (b,\tau)$



*lze parametrizovat:

$t = b\,\mathrm{sh}\,\tau$

$r = b\,\mathrm{ch}\,\tau$

$$g = db\,db + b^2(-d\tau\, d\tau + \mathrm{ch}^2\tau\, d\varphi\, d\varphi)$$

$$g|_{b=\text{konst}} = b_0^2(-d\tau\, d\tau + \mathrm{ch}^2\tau\, d\varphi\, d\varphi)$$

dS^2 de Sitterův prostoročas (kladná konst. křivost)

2) spočtěte podalgebru so(2,1) symetrií

Kill. vekt.

translace: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}$

rotace: $\xi_R = \frac{\partial}{\partial \varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

boosty: $\xi_{(x)} = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_{(y)} = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y}$

so(2,1) Lorentz

Poincaré

$$[\xi_R, \xi_{(x)}] = \left[-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\right] = -y\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial y} = -\xi_{(y)}$$

$$[\xi_R, \xi_{(y)}] = \left[-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y}\right] = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x} = +\xi_{(x)}$$

$$[\xi_{(x)}, \xi_{(y)}] = \left[x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y}\right] = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = +\xi_R$$

* strukturní konstanty

$-c_{12}{}^3 = c_{13}{}^2 = c_{23}{}^1 = 1$

Prostor antisymetrických tenzorů

definice:

$V^{[k]} \subset V^k$ je prostor antisymetrických tenzorů k-tého stupně, $k = 0, \dots, d$; dim $V^{[k]} = \binom{d}{k}$

$$A \in V^{[k]} \quad \equiv \quad \forall \sigma - \text{permutace } [1, \dots, k] \ : \quad A^{a_1 \dots a_k} = \operatorname{sign} \sigma \ A^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_k}}$$

antisymetrizace:

$$A = \mathcal{A} B \qquad A^{a_1 \dots a_k} = B^{[a_1 \dots a_k]} = \frac{1}{k!} \sum_\sigma \operatorname{sign} \sigma \ B^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_k}}$$

$$A \in V^{[k]} \quad \Leftrightarrow \quad A^{a_1 \dots a_k} = A^{[a_1 \dots a_k]}$$

projektor na $V^{[k]}$:

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k} = \delta^{[a_1}_{b_1} \dots \delta^{a_k]}_{b_k} = \delta^{\ a_1}_{[b_1} \dots \delta^{a_k}_{b_k]} \qquad , \qquad {}^{[k]}\delta \in V^{[k]}_{[k]}$$

vlastnosti projektoru:

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{r_1 \dots r_k} \, {}^{[k]}\delta^{r_1 \dots r_k}_{b_1 \dots b_k} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k} \qquad , \qquad A^{[a_1 \dots a_k]} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{r_1 \dots r_k} \, A^{r_1 \dots r_k}$$

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_{k-l} a_{k-l+1} \dots a_k}_{b_1 \dots b_{k-l} r_1 \ \dots \ r_l} \, {}^{[l]}\delta^{r_1 \ \dots \ r_l}_{b_{k-l+1} \dots b_k} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k}$$

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_l r_1 \dots r_{k-l}}_{b_1 \dots b_l r_1 \dots r_{k-l}} = \frac{(d-l)! \, l!}{(d-k)! \, k!} \, {}^{[l]}\delta^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_l} \qquad , \qquad {}^{[k]}\delta^{r_1 \dots r_k}_{r_1 \dots r_k} = \dim V^{[k]}$$

$${}^{[k]}\delta^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_k}}_{b_{\sigma_1} \dots b_{\sigma_k}} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1, \dots, k]$$

souřadnice:

$$A = A^{a_1 \dots a_k} \, \vec{e}_{a_1} \dots \vec{e}_{a_k} = \sum_{a_1 < \dots < a_k} A^{a_1 \dots a_k} \ k! \, \mathcal{A}(\vec{e}_{a_1} \dots \vec{e}_{a_k})$$

totálně antisymetrické formy a tenzory:

prostory $V_{[d]}$ a $V^{[d]}$, kde d je dimenze prostoru V; dim $V_{[d]}$ = dim $V^{[d]} = 1$
souřadnice ($\alpha \in V_{[d]}$):

$$\alpha = \alpha_{a_1 \dots a_d} \, \underset{\rightarrow}{e}^{a_1} \dots \underset{\rightarrow}{e}^{a_d} = \alpha_{1 \dots d} \sum_\sigma \operatorname{sign} \sigma \ \underset{\rightarrow}{e}^{\sigma_1} \dots \underset{\rightarrow}{e}^{\sigma_d} = \alpha_{1 \dots d} \ d! \, \mathcal{A}(\underset{\rightarrow}{e}^{1} \dots \underset{\rightarrow}{e}^{d})$$

inverze:

$${}^{-1} \ : \ V_{[d]} \leftrightarrow V^{[d]} \ , \quad \alpha \rightarrow \alpha^{-1} \ , \quad (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha \ , \quad \alpha_{r_1 \dots r_d} \, \alpha^{-1\, r_1 \dots r_d} = d!$$

vlastnosti inverze:

$$\alpha_{b_1 \dots b_k r_1 \dots r_{d-k}} \, \alpha^{-1\, a_1 \dots a_k r_1 \dots r_{d-k}} = (d-k)! \, k! \, {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k}$$

$$\alpha_{b_1 \dots b_d} \, \alpha^{-1\, a_1 \dots a_d} = d! \, {}^{[d]}\delta^{a_1 \dots a_d}_{b_1 \dots b_d} \qquad , \qquad \alpha_{r_1 \dots r_d} \, \alpha^{-1\, r_1 \dots r_d} = d!$$

$$\alpha^{-1\, 1 \dots d} = (\alpha_{1 \dots d})^{-1}$$

determinant:

$$\det A = {}^{[d]}\delta^{a_1 \dots a_d}_{b_1 \dots b_d} \, A^{b_1}_{a_1} \dots A^{b_d}_{a_d} = \sum_\sigma \operatorname{sign} \sigma \ A^{\sigma_1}_1 \dots A^{\sigma_d}_d \qquad , \qquad A \in V^1_1$$

Prostor symetrických tenzorů

definice:

$V^{(k)} \subset V^k$ je prostor symetrických tenzorů k-tého stupně, $k \in \mathbb{N}_0$; $\quad \dim V^{(k)} = \binom{k+d-1}{k}$

$$A \in V^{(k)} \quad \equiv \quad \forall \sigma - \text{permutace } [1, \ldots, k] \ : \quad A^{a_1 \ldots a_k} = A^{a_{\sigma_1} \ldots a_{\sigma_k}}$$

symetrizace:

$$A = \mathcal{S} B \qquad A^{a_1 \ldots a_k} = B^{(a_1 \ldots a_k)} = \frac{1}{k!} \sum_\sigma B^{a_{\sigma_1} \ldots a_{\sigma_k}}$$

$$A \in V^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad A^{a_1 \ldots a_k} = A^{(a_1 \ldots a_k)}$$

projektor na $V^{(k)}$:

$$^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_k}_{b_1 \ldots b_k} = \delta^{(a_1}_{b_1} \ldots \delta^{a_k)}_{b_k} = \delta^{\ a_1}_{(b_1} \ldots \delta^{a_k}_{b_k)} \qquad , \qquad {}^{(k)}\delta \in V^{(k)}_{(k)}$$

vlastnosti projektoru:

$$^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_k}_{r_1 \ldots r_k} \, {}^{(k)}\delta^{r_1 \ldots r_k}_{b_1 \ldots b_k} = {}^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_k}_{b_1 \ldots b_k} \qquad , \qquad A^{(a_1 \ldots a_k)} = {}^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_k}_{r_1 \ldots r_k} A^{r_1 \ldots r_k}$$

$$^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_{k-l} a_{k-l+1} \ldots a_k}_{b_1 \ldots b_{k-l} r_1 \quad \ldots \quad r_l} \, {}^{(l)}\delta^{r_1 \quad \ldots \quad r_l}_{b_{k-l+1} \ldots b_k} = {}^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_k}_{b_1 \ldots b_k}$$

$$^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_l r_1 \ldots r_{k-l}}_{b_1 \ldots b_l r_1 \ldots r_{k-l}} = \frac{(k+d-1)!\, l!}{(l+d-1)!\, k!} \, {}^{(l)}\delta^{a_1 \ldots a_l}_{b_1 \ldots b_l} \qquad , \qquad {}^{(k)}\delta^{r_1 \ldots r_k}_{r_1 \ldots r_k} = \dim V^{(k)}$$

$$^{(k)}\delta^{a_{\sigma_1} \ldots a_{\sigma_k}}_{b_{\sigma_1} \ldots b_{\sigma_k}} = {}^{(k)}\delta^{a_1 \ldots a_k}_{b_1 \ldots b_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1, \ldots, k]$$

souřadnice:

$$A = A^{a_1 \ldots a_k} \, \vec{e}_{a_1} \ldots \vec{e}_{a_k} = \sum_{a_1 \leq \cdots \leq a_k} A^{a_1 \ldots a_k} \ n(a_1, \ldots, a_k) \ \mathcal{S}(\vec{e}_{a_1} \ldots \vec{e}_{a_k})$$

$n(a_1, \ldots, a_k)$ je počet vzájemně odlišných permutací indexů $a_1 \ldots a_k$